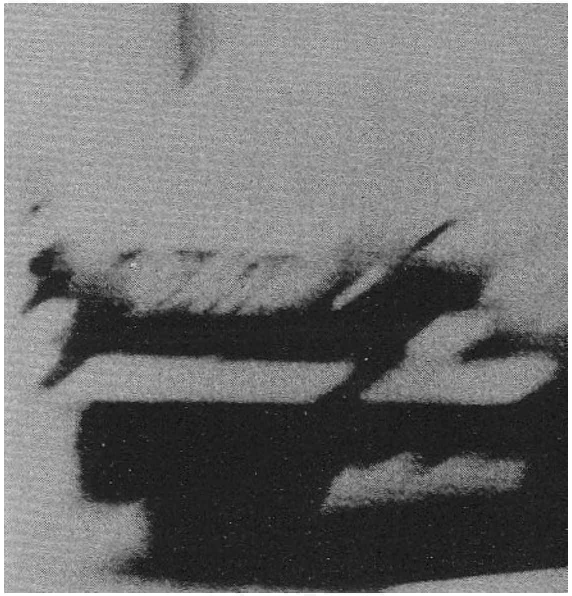
情報のエントロピーと
統計力学のエントロピー

内容

- 情報科学の応用例
- 情報量の数値化
- 情報のエントロピー
- 統計力学との関係

Example of MEM analysis

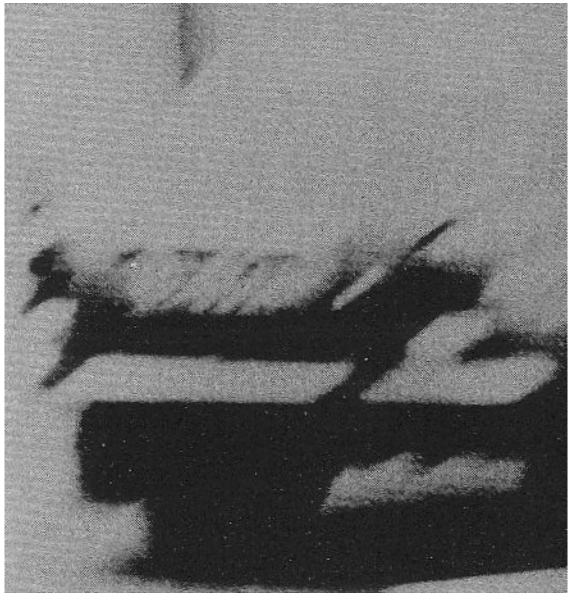
blurred image



R.N.Silver et al. Phys. Rev. B41, 2380(1990)

Example of MEM analysis

blurred image



restore

R.N.Silver et al. Phys. Rev. B41, 2380(1990)

情報量の数値化

例) トランプのカードを１枚引く

E_1 :「マーク は♥」
E_2 :「数字は ６」
E_3 :「♥の６」

情報量の数値化

例) トランプのカードを１枚引く

E_1 :「マークは♥」
E_2 :「数字は６」
E_3 :「♥の６」

事象Eの情報量 : $I(E)$

$p(E)$ ： 事象Eの起きる確率

$$I(E) = -\log p(E)$$

Information content : I(E)

$p(♥) = 1/4$, $p(6) = 1/13$, $p(♥6) = 1/52$

$I(♥) = -\log(p(♥)) = 1.39$
$I(6) = -\log(p(6)) = 2.56$
$I(♥6) = -\log(p(♥6)) = 3.95$

情報量: I(E)

$p(♥) = 1/4,\ p(6) = 1/13,\ p(♥6) = 1/52$

$I(♥) = -\log(p(♥)) = 1.39$
$I(6) = -\log(p(6)) = 2.56$
$I(♥6) = -\log(p(♥6)) = 3.95$

$$I(♥6) = I(♥) + I(6)$$

一般に,

$$p(E_1) < p(E_2) \quad \Rightarrow \quad I(E_1) > I(E_2)$$

$I(E_1E_2) = I(E_1) + I(E_2)$ ：情報の加法性

$I(E) = -\log(p(E))$ だけが，この関係を満たす

情報理論のエントロピー

エントロピーは得られる情報量の平均値:

$$S = \sum_i p(E_i) I(E_i) = -\sum_i p(E_i) \log p(E_i)$$

例) １つのコインの投げ上げ

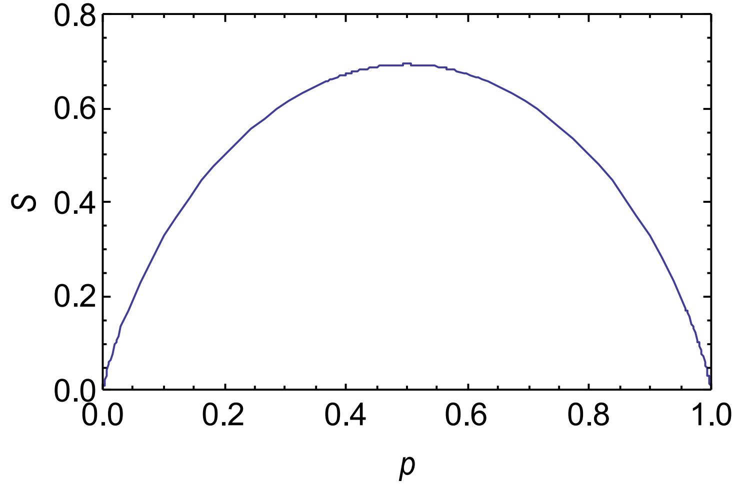
E_1 : 表が出る
E_2 : 裏が出る
$p(E_1) = p$
$p(E_2) = 1\text{-}p$

$$S = -p \log p - (1-p) \log(1-p)$$

情報理論のエントロピー

$$S = -p \log p - (1-p)\log(1-p)$$

両面裏のコイン



両面表のコイン

エントロピーは

- 不確かさ（乱雑さ）の指標
- $p(E_1) = p(E_2) = p(E_3) = \ldots = 1/\mathrm{N}$の時最大

統計力学のエントロピーとの類似性

情報理論のエントロピーの定義

$$S = -\sum_i p_i \log p_i$$

$p_i : i$ 番目の事象が実現する確率

統計力学のエントロピーの定義

$$S = -k_B \sum_i p_i \log p_i$$

$p_i : i$ 番目の量子状態を取る確率

小正準集合

統計力学におけるエントロピーの定義

$$S = -k_B \sum_i p_i \log p_i$$

p_i : i 番目の量子状態を取る確率

取れる状態数をWとして，p_i=1/Wの時

$$S = k_B \log W$$

正準集合

統計力学におけるエントロピーの定義

$$S = -k_B \sum_i p_i \log p_i$$

p_i : i 番目の量子状態を取る確率

以下の条件でエントロピーを最大にする

$$C_1(\mathbf{p}) = \sum_i p_i = 1, C_2(\mathbf{p}) = \sum_i p_i E_i = \langle E \rangle$$

$$L(\mathbf{p}, \alpha, \beta) = S(\mathbf{p}) - k_B \alpha [C_1(\mathbf{p}) - 1] - k_B \beta [C_2(\mathbf{p}) - \langle E \rangle]$$

$$\Longrightarrow \quad p_l = \frac{1}{Z} \exp\left[-\beta E_l\right], \quad Z = \sum_i \exp\left[-\beta E_i\right]$$