

[1] 以下の問いに答えよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき, 積 AB を求めよ.

(2) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$ とするとき, 内積 (\mathbf{a}, \mathbf{b}) を求めよ.

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ とするとき, 積 AB と BA を求めよ.

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき, A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(5) (4) の結果を用いて連立方程式, $\begin{cases} x + y = 1 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases}$ を解け. 途中の計算も示すこと.

[2] 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について, 以下の余因子と行列式を計算せよ. 途中の計算も示すこと.

(1) Δ_{11} (2) Δ_{21} (3) Δ_{31} (4) Δ_{41} (5) $|A|$

[3] 反時計回りに θ 回転する 1 次変換の表現行列は, $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ で与えられる. 以下の問いに答えよ.

(1) A がユニタリ行列であることを示せ.

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ. 途中の計算または求め方を示すこと

(3) 行列 A で $\theta = \frac{\pi}{4}$ である行列を B とする. この行列 B で表現される 1 次変換により方程式 $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$ はどのような方程式に変換されるか求めよ.

(4) (3) の結果から, もとの方程式 $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$ のグラフの概形を描け.

[4] $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ とするとき以下の問いに答えよ.

(1) A がエルミート行列であることを示せ.

(2) この行列の固有値を全て求めよ.

(3) (2) で求めた固有値に対応する規格化された固有ベクトルを求めよ.

(4) (3) で求めた固有ベクトルが直交することを示せ. 計算も示すこと.

(5) 行列 A を対角化せよ. 途中の計算も示すこと