物理数学基礎演習 演習問題
（平成30年度版）

1　偏微分

1.1　偏微分係数と偏導関数

[問題 1.1 ］ 次の 2 変数関数 $z = f(x, y)$ の 1 階偏導関数を求めよ．

(1)　$z = x^3 - 4x^2y + xy + 3y^2$　(2)　$z = \dfrac{y}{x}$　(3)　$z = \sin(x - y)$

(4)　$z = \cos xy$　(5)　$z = \sqrt{x^2 - 4y^2}$　(6)　$z = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

(7)　$z = \log(x^2 + y^2)$　(8)　$z = \tan^{-1}\dfrac{xy}{\sqrt{2 + x^2 + y^2}}$

(解答) (1) $z_x = 3x^2 - 8xy + y$，$z_y = -4x^2 + x + 6y$，(2) $z_x = -\dfrac{y}{x^2}$，$z_y = \dfrac{1}{x}$，(3) $z_x = \cos(x - y)$，$z_y = -\cos(x - y)$，(4) $z_x = -y\sin xy$，$z_y = -x\sin xy$，(5) $z_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4y^2}}$，$z_y = \dfrac{-4y}{\sqrt{x^2 - 4y^2}}$，(6) $z_x = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$，$z_y = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$，(7) $z_x = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$，$z_y = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$ (8) $z_x = \dfrac{y(2 + y^2)}{(2 + x^2 + y^2 + x^2y^2)\sqrt{2 + x^2 + y^2}}$，$z_x = \dfrac{x(2 + x^2)}{(2 + x^2 + y^2 + x^2y^2)\sqrt{2 + x^2 + y^2}}$

[問題 1.2 ］ 曲面 $z = \dfrac{1}{xy}$ 上の点 $(1, 1, 1)$ における接平面の方程式を求めよ．

(解答) $z = 3 - x - y$

[問題 1.3 ］ 曲面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 上の点 $(1, 1, \sqrt{2})$ における接平面の方程式を求めよ

(解答) $x + y + \sqrt{2}z = 4$

1.2　関数の勾配

[問題 1.4 ］ 地表面を原点にとり鉛直上方を z 軸に取ると，地表面から高さ z にある質量 m の物体の位置エネルギー $U(z)$ は $U(z) = mgz$ である（ここでの位置エネルギーは z のみに依存するので，z のみの関数として表す）．このとき，この物体に働く力 $\boldsymbol{F}(z)$ を求めよ．

(解答) $\boldsymbol{F}(z) = (0, 0, -mg)$

[問題 1.5 ］ 質量 M の質点を原点に置くと，この質点は重力ポテンシャル $\Phi(x, y, z) = -G\dfrac{M}{r}$ をつくる（$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする）．このとき，以下に答えよ．

(1) この質点が点 (x, y, z) につくる重力場 $\boldsymbol{G}(x, y, z)$ を求めよ．
(2) 重力場の大きさ $|\boldsymbol{G}(x, y, z)|$ を求めよ．
(3) 重力場の方向の単位ベクトル（大きさ 1 のベクトル）を示せ．

(解答) (1) $\boldsymbol{G}(x, y, z) = -G\dfrac{M}{r^3}(x, y, z)$，(2) $|\boldsymbol{G}(x, y, z)| = G\dfrac{M}{r^2}$ (3) $-\dfrac{1}{r}(x, y, z)$

[問題 1.6 ］ 2 次元空間では電荷 q の質点を原点 $(0, 0)$ に置くと，この電荷は静電ポテンシャル $\phi(x, y) = -kq\log\sqrt{x^2 + y^2}$ をつくる（k は正の定数）．このとき，以下に答えよ（$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ としてよい）．

(1) この電荷が点 (x, y) につくる電場 $\boldsymbol{E}(x, y)$ を求めよ.

(2) 電場の大きさ $|\boldsymbol{E}(x, y)|$ を求めよ.

(3) q の符号の正負に応じた電場の向きを示せ.

(解答) (1) $\boldsymbol{E}(x, y) = k\dfrac{q}{r^2}(x, y)$，(2) $|\boldsymbol{E}(x, y)| = k\dfrac{|q|}{r}$ (3) 省略

1.3 高次偏微分

[問題 1.7] 次の関数について，$f_{xy} = f_{yx}$ を確かめよ.

(1) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (2) $f(x, y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

(解答) (1) $f_{xy} = f_{yx} = \dfrac{-xy}{(1 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}$，(2) $f_{xy} = f_{yx} = \dfrac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$

[問題 1.8] 次の 2 変数関数 $z = f(x, y)$ の 2 階偏導関数を求めよ（この問題では $z_{xy} = z_{yx}$ を用いてよい）.

(1) $z = x^2y^2(x - 2y)$ (2) $z = e^x \sin y$ (3) $z = \sin 2xy$

(4) $z = e^{-xy}$ (5) $z = \log\sqrt{x^2 + y^2}$ (6) $z = \tan^{-1} xy$

(解答) (1) $z_{xx} = 2y^2(3x - 2y)$，$z_{xy} = z_{yx} = 6xy(x - 2y)$，$z_{yy} = 2x^2(x - 6y)$，(2) $z_{xx} = e^x \sin y$，$z_{xy} = z_{yx} = e^x \cos y$，$z_{yy} = -e^x \sin y$，(3) $z_{xx} = -4y^2 \sin 2xy$，$z_{xy} = z_{yx} = 2\cos 2xy - 4xy \sin 2xy$，$z_{yy} = -4x^2 \sin 2xy$ (4) $z_{xx} = y^2e^{-xy}$，$z_{xy} = z_{yx} = (xy - 1)e^{-xy}$，$z_{yy} = x^2e^{-xy}$，(5) $z_{xx} = \dfrac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$，$z_{xy} = z_{yx} = -\dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$，$z_{yy} = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$，(6) $z_{xx} = -\dfrac{2xy^3}{(1 + x^2y^2)^2}$，$z_{xy} = z_{yx} = \dfrac{1 - x^2y^2}{(1 + x^2y^2)^2}$，$z_{yy} = -\dfrac{2x^3y}{(1 + x^2y^2)^2}$

[問題 1.9] 関数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ について，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を計算せよ.

(解答) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

[問題 1.10] 関数 $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ について，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ を計算せよ.

(解答) $\dfrac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

1.4 全微分

[問題 1.11] 次の 2 変数関数 $z = f(x, y)$ の全微分を求めよ.

(1) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ (2) $z = e^x \sin y$ (3) $z = \log\sqrt{x^2 + y^2}$

(解答) (1) $dz = \dfrac{xdx - ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$，(2) $dz = e^x(\sin y dx + \cos y dy)$，(3) $dz = \dfrac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$

[問題 1.12] $-ydx + xdy$ 自体は全微分形式でないことを確認し，全体に積分因子 $\dfrac{1}{x^2}$ をかけることで，$f(x, y) = \dfrac{y}{x}$ の全微分形式となることを示せ.

(解答) 省略

1.5　合成関数の偏微分

[問題 1.13]　以下の合成関数 z について，z_u，z_v を u と v の関数として計算せよ（先に x や y に代入して（x や y を消去して）計算しないこと）．

(1)　$z=\dfrac{xy}{x+y}$，$x=u\cos v$，$y=u\sin v$　　(2)　$z=e^{xy}$，$x=u-v$，$y=uv$

(3)　$z=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$，$x=-u^2+v^2$，$y=uv$

(解答) (1) $z_u=\dfrac{\sin v\cos v}{\sin v+\cos v}$，$z_v=\dfrac{u(\cos^3 v-\sin^3 v)}{(\cos v+\sin v)^2}$，(2) $z_u=(2uv-v^2)e^{(u-v)uv}$，
$z_v=(u^2-2uv)e^{(u-v)uv}$，(3) $z_u=\dfrac{v(u^2+v^2)}{u^4-u^2v^2+v^4}$，$z_v=\dfrac{-u(u^2+v^2)}{u^4-u^2v^2+v^4}$

[問題 1.14]　以下の合成関数 z について，z_x，z_y を x と y の関数として計算せよ（先に u や v に代入して（u や v を消去して）計算しないこと）．

(1)　$z=uv$，$u=x+y$，$v=3x+2y$　　(2)　$z=\dfrac{\sin u}{v}$，$u=\dfrac{y}{x}$，$v=x^2+y^2$

(3)　$z=e^{\sin u+\cos v}$，$u=xy$，$v=x+y$

(解答) (1) $z_x=6x+5y$，$z_y=5x+4y$，(2) $z_x=-\left\{(x^2+y^2)y\cos\dfrac{y}{x}+2x^3\sin\dfrac{y}{x}\right\}/x^2(x^2+y^2)^2$，
$z_y=\left\{(x^2+y^2)\cos\dfrac{y}{x}-2xy\sin\dfrac{y}{x}\right\}/x(x^2+y^2)^2$，(3) $z_x=z\{y\cos xy-\sin(x+y)\}$，
$z_y=z\{x\cos xy-\sin(x+y)\}$

[問題 1.15]　以下の合成関数 z について，$\dfrac{dz}{dt}$ を t の関数として計算せよ（先に x や y に代入して（x や y を消去して）計算しないこと）．

(1)　$z=x^2-y$，$x=e^t$，$y=e^{-t}$　　(2)　$z=e^x\sin y$，$x=t^2$，$y=t-1$

(解答) (1) $2e^{2t}+e^{-t}$，(2) $e^{t^2}(2t\sin(t-1)+\cos(t-1))$

[問題 1.16]　次の方程式で定まる陰関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(1)　$x^3-3axy+y^3=0$　　(2)　$ax^2+2xy+by^2=1$

(3)　$\log(x^2+y^2)=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$　　(4)　$xe^{-y}=y\sin x$

(解答) (1) $\dfrac{x^2-ay}{ax-y^2}$，(2) $-\dfrac{ax+y}{x+by}$，(3) $\dfrac{2x+y}{x-2y}$，(4) $\dfrac{e^{-y}-y\cos x}{xe^{-y}+\sin x}$

[問題 1.17]　合成関数 $z=f(x,y)$，$x=e^u\cos v$，$y=e^u\sin v$ について，以下に答えよ．

(1) $x_u=x$, $x_v=-y$ を確かめよ．

(2) $y_u=y$, $y_v=x$ を確かめよ．

(3) チェイン・ルールに従い，(1) と (2) の結果を用いて，$z_{uu}+z_{vv}=(x^2+y^2)(z_{xx}+z_{yy})$ が成り立つことを示せ．

（z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yx}, z_{yy} を具体的に計算することなく示せるので，$f(x,y)$ の具体的な形には依らない）．

(解答省略)

1.6　座標変換

[問題 1.18]　2 変数関数 $f(x,y)$ において，2 次元の極座標を用いると，

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2$$

となることを示せ．(解答省略)

[問題 1.19] 球座標 (3 次元極座標) を用いた時に以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \sin\theta\cos\phi\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta\cos\phi}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta} - \dfrac{\sin\phi}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \phi}$ となることを示せ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\sin\phi\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta\sin\phi}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta} + \dfrac{\cos\phi}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \phi}$ となることを示せ．

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ となることを示せ．

(4) (1)-(3) を用いて，

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

を証明せよ．(解答省略)

[問題 1.20] 2 次元極座標を用いた場合，$\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$ となることを利用して，以下を計算せよ．

(1) $\Delta\sqrt{x^2+y^2}$　(2) $\Delta\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(3) $\Delta\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

(解答) (1) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$，(2) $-\dfrac{x+y}{r^3}$，(3) 0

[問題 1.21] 3 次元の極座標を用いた場合，$\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \dfrac{\cot\theta}{r^2}\dfrac{\partial f}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$ となることを利用して，以下を計算せよ．

(1) $\Delta\sqrt{x^2+y^2+z^2}$　(2) $\Delta\dfrac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$　(3) $\Delta\dfrac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}$

(解答) (1) $\dfrac{2}{r}$，(2) $-\dfrac{2(x+y+z)}{r^3}$，(3) $-\dfrac{2(x+y+z)}{r^4}$

1.7 演算子

※演算子の等式を示す時には，必ず，任意の関数に演算した結果についての等式を示すこと．

[問題 1.22] 2 つの演算子 A，B に対して，$[A,B] = AB - BA$ で定義される [,] を交換子と呼ぶ．$p_x = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$，$p_y = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial y}$，$p_z = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial z}$ ($\hbar$ は定数) で定義される演算子について，

(1) $[x,p_x] = [y,p_y] = [z,p_z] = i\hbar$ を示せ．

(2) $[x,y] = [y,z] = [z,x] = [p_x,p_y] = [p_y,p_z] = [p_z,p_x] = 0$ を確かめよ．

(3) $[x,p_y] = [x,p_z] = [y,p_z] = [y,p_x] = [z,p_x] = [z,p_y] = 0$ を確かめよ．

(解答省略)

[問題 1.23] $L_x = yp_z - zp_y$，$L_y = zp_x - xp_z$，$L_z = xp_y - yp_x$ で定義される演算子について，$[A+B,C] = [A,C]+[B,C]$ や $[AB,C] = A[B,C]+[A,C]B$ などの交換子の公式と問題 1.23 で得られた結果を用いて，以下の問いに答えよ．
（この問題では，任意の関数に演算した結果についての等式を示す必要はなく，交換子の公式などだけを用いて示せばよい）

(1) $[L_x, L_y]$，$[L_y, L_z]$，$[L_z, L_x]$ を計算せよ

(2) $L^2 = (L_x)^2 + (L_y)^2 + (L_z)^2$ とするとき，$[L^2, L_x] = [L^2, L_y] = [L^2, L_z] = 0$ を示せ

(解答) (1) $i\hbar L_z$，$i\hbar L_x$，$i\hbar L_y$，(2) 省略

[問題 1.24] 問題 1.**23** で定義された演算子，L_x，L_y，L_z は 3 次元極座標で表すと，

(1) $L_x = -i\hbar\left(-\sin\phi\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\cos\phi\dfrac{\partial}{\partial\phi}\right)$

(2) $L_y = -i\hbar\left(\cos\phi\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\dfrac{\partial}{\partial\phi}\right)$

(3) $L_z = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\phi}$

となることを示せ．(ヒント：問題 1.**19** の結果を用いよ．)
(解答省略)

[問題 1.25] 問題 1.**24** の結果を用いて，$L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = -\hbar^2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$ となることを示せ．(解答省略)

1.8 平均値の定理とテイラー展開

※テイラー展開では，途中で必要な全ての次数の偏導関数と偏微分係数を別々に明示して計算すること．

[問題 1.26] 次の関数を原点 $(0,0)$ の周りに x，y について 3 次までテイラー展開せよ．

(1) $f(x,y) = \dfrac{1+y}{1-x}$ (2) $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x+y}$ (3) $f(x,y) = \cos xy$

(4) $f(x,y) = \sin x\cos y$ (5) $f(x,y) = e^x\sin y$ (6) $f(x,y) = \log(1+x-y)$

(解答) (1) $1+x+y+x(x+y)+x^2(x+y)+\cdots$，(2) $1-(x+y)+(x+y)^2-(x+y)^3+\cdots$，(3) $1+\cdots$，(4) $x-\dfrac{1}{6}(x^3+3xy^2)+\cdots$，(5) $y+xy+\dfrac{1}{6}(3x^2y-y^3)+\cdots$，(6) $x-y-\dfrac{1}{2}(x-y)^2+\dfrac{1}{3}(x-y)^3-\cdots$

[問題 1.27] 以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y) = \sin(x-y)$ を $(\dfrac{\pi}{2}, 0)$ の周りに x，y について 4 次までテイラー展開せよ．

(2) 関数 $f(x,y) = \log(1+xy)$ を $(1,1)$ の周りに x，y について 3 次までテイラー展開せよ．

(解答) (1) $1-\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{\pi}{2})^2+(x-\dfrac{\pi}{2})y-\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{1}{24}(x-\dfrac{\pi}{2})^4-\dfrac{1}{6}(x-\dfrac{\pi}{2})^3y+\dfrac{1}{4}(x-\dfrac{\pi}{2})^2y^2-\dfrac{1}{6}(x-\dfrac{\pi}{2})y^3+\dfrac{1}{24}y^4+\cdots$
(2) $\log 2+\dfrac{1}{2}\{(x-1)+(y-1)\}-\dfrac{1}{8}\{(x-1)^2-2(x-1)(y-1)+(y-1)^2\}$
$+\dfrac{1}{24}\{(x-1)^3-3(x-1)^2(y-1)-3(x-1)(y-1)^2+(y-1)^3\}+\cdots$

[問題 1.28] 質量 m の質点の地球の万有引力による位置エネルギーは，地球の質量を M，万有引力定数を G とし，地球の中心を原点とすると，$U(x,y,z) = -G\dfrac{Mm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ で与えられる．地球を半径 R_0 の球とみなし，北極点に対応する点 N の位置座標を $(0,0,R_0)$ として，以下の問いに答えよ．

(1) $U(x,y,z)$ を点 N の周りに x，y，z について 1 次までテイラー展開せよ．

(2) 地表点の代表として点Nを考える．点Nでの位置エネルギー $U(0,0,R_0)$ を $U(x,y,z)$ から差し引けば，地表を基準にした位置エネルギーが求まる．地表からの高さを h とした時（$h=z-R_0$），前問 (1) を用いて表した，地表を基準にした位置エネルギーを $U_{\mathrm{E}}(h)$ とする．$U_{\mathrm{E}}(h)$ について，h の 2 次以上の項（(1) の「$+\cdots$」の項）を無視した近似式を示せ（「近似的に等しい」ことを示す記号「$\simeq$」を用いてよい）．

(3) 重力加速度 g を用いると，地表から h の高さにある質量 m の質点の位置エネルギーは h の一次までの近似で mgh と表される．この近似的な表式と前問 (2) の $U_{\mathrm{E}}(h)$ を比較して，g を，G，R_0 と M を用いて書き表せ．

(解答) (1) $-G\dfrac{Mm}{R_0}+G\dfrac{Mm}{R_0^2}(z-R_0)+\cdots$，(2) 省略，(3) $G\dfrac{M}{R_0^2}$

1.9 多変数関数の極値問題

※この章では変数は全て実数の範囲で考えるものとする．

[問題 1.29] 次の関数 $z=f(x,y)$ で極値が存在すれば，極値の座標とその値を求めよ．

(1) $z=x^2-\dfrac{y^2}{2}$　(2) $z=-3x^2+2xy-y^2$　(3) $z=x^2+xy+y^2-4x-2y$

(4) $z=x^2-2xy-3y^2$　(5) $z=e^{-(x^2+2y^2)}$　(6) $z=\sin x\sin y\ (-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2})$

(解答) (1) 極値はない，(2) $(0,0)$ で極大値 0，(3) $(2,0)$ で極小値 -4，(4) 極値はない，(5) $(0,0)$ で極大値 1，(6) $(\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{\pi}{2})$ で極大値 1，$(\pm\frac{\pi}{2},\mp\frac{\pi}{2})$ で極小値-1

[問題 1.30] ラグランジュの未定乗数法を用いて，次の関数 $z=f(x,y)$ が (　) 内の条件のもとに極値をとる候補点をすべて求めよ．

(1) $z=2x+y\ \ (x^2+y^2=1)$　(2) $z=x^2+4xy+4y^2\ \ (x^2+y^2=1)$

(3) $z=x^2+y^2\ \ (xy=1)$　(4) $z=x-2y\ \ (xy=-1)$

(解答) (1) $\left(\dfrac{2}{\sqrt5},\dfrac{1}{\sqrt5}\right)$，$\left(-\dfrac{2}{\sqrt5},-\dfrac{1}{\sqrt5}\right)$，(2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt5},\dfrac{2}{\sqrt5}\right)$，$\left(-\dfrac{1}{\sqrt5},-\dfrac{2}{\sqrt5}\right)$，$\left(\dfrac{2}{\sqrt5},-\dfrac{1}{\sqrt5}\right)$，$\left(-\dfrac{2}{\sqrt5},\dfrac{1}{\sqrt5}\right)$，(3) $(1,1)$，$(-1,-1)$，(4) $\left(\sqrt2,-\dfrac{1}{\sqrt2}\right)$，$\left(-\sqrt2,\dfrac{1}{\sqrt2}\right)$

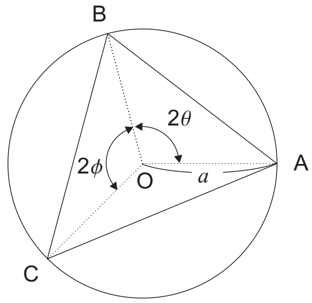
[問題 1.31] 半径 1 の円に内接する長方形で面積が最大のものは，どのような長方形か，またそのときの面積はいくらか求めよ（ラグランジュの未定乗数法を用いよ）．
(ヒント：円の中心を座標原点にとると，円周上の点 (x,y) は $x^2+y^2=1$ を満たし，長方形の向かい合わない 2 辺の長さは各々$2x$，$2y$（$x,y>0$）とおける．)

(解答) 正方形，面積は 2

[問題 1.32] 下図のように原点 O を中心とする半径 a の円に内接する 3 角形 ABC を考える．$\angle$AOB$=2\theta$，$\angle$BOC$=2\phi$ $(0<\theta\le\phi)$ とするとき，以下の問いに答えよ（ラグランジュの未定乗数法ではなく，単純な極値問題として考えればよい）．

(1) 3 角形の 3 辺の和を θ，ϕ の 2 変数関数として表せ（a は定数）.

(2) 円に内接する 3 角形のうち，3 辺の和が極大になるのは正 3 角形であることを示せ.



(解答) (1) $2a(\sin\theta + \sin\phi + \sin(\theta + \phi))$，(2) 省略

[問題 1.33] 問題 1.32 と同じ半径 a の円に内接する 3 角形を考える．このとき，以下の問いに答えよ（ラグランジュの未定乗数法ではなく，単純な極値問題として考えればよい）.

(1) 3 角形の面積を θ，ϕ の 2 変数関数として表せ（a は定数）.

(2) 円に内接する 3 角形のうち，面積が極大になるものは正 3 角形になることを示し，そのときの面積を求めよ.

(解答) (1) $\frac{1}{2}a^2(\sin 2\theta + \sin 2\phi - \sin 2(\theta + \phi))$，(2) 省略

[問題 1.34] 直線 $x + 2y = 4$ 上の点 (x, y) のうち，点 $(2, 4)$ からの距離の二乗が最も短い点を求め，そのときの距離を求めよ（ラグランジュの未定乗数法を用いよ）.

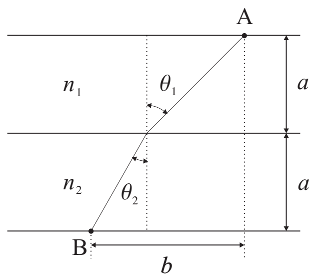
(解答) $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ で距離は $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

[問題 1.35] 光は屈折率 n の媒質中を進むときは速さが $1/n$ になる．逆にいうと光学的な距離は n 倍になると考えることができる．光はこの光学的な距離が最短になるように進む．そのため屈折率の異なる物質の表面で屈折をする．今，下図のような配置で屈折率が n_1 と n_2 の媒質がある場合に，点 A から出た光が入射角 θ_1 で屈折率 n_2 の媒質に入射し，屈折角 θ_2 で屈折し点 B に届く場合を考える．以下の問いに答えよ.

(1) 点 A と点 B の水平方向の距離 l を，a を定数として，θ_1，θ_2 の 2 変数関数 $l(\theta_1, \theta_2)$ として表せ.

(2) 点 A から点 B に至る径路の光学的な距離 L を，a, n_1, n_2 を定数として，θ_1，θ_2 の 2 変数関数 $L(\theta_1, \theta_2)$ として表せ.

(3) 光は，(1) で求めた距離 $l(\theta_1, \theta_2)$ が，ある一定値 b に等しいという条件の下で，$L(\theta_1, \theta_2)$ が最短になるように進む．このことから，ラグランジュの未定乗数法を用いて，屈折の法則 $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$ を導け.



(解答) (1) $a(\tan\theta_1 + \tan\theta_2)$, (2)$n_1\frac{a}{\cos\theta_1} + n_2\frac{a}{\cos\theta_2}$, (3) 省略

2　微分方程式

2.1　微分方程式とは

[問題 2.1]　微分方程式 $y' - y = x$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $y = ae^x - x - 1$ がこの微分方程式の一般解であることを示せ（a は任意定数）．

(2) 初期条件 $y(0) = 0$ のもとに，この微分方程式を解け．

(解答) (1) 省略，(2) $y = e^x - x - 1$

[問題 2.2]　微分方程式 $y'' - 3y' + 2y = 0$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $y = ae^x + be^{2x}$ がこの微分方程式の一般解であることを示せ（a と b は任意定数）．

(2) 初期条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ のもとに，この微分方程式を解け．

(解答) (1) 省略，(2) $y = -e^x + e^{2x}$

[問題 2.3]　偏微分方程式 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) = \dfrac{1}{v^2} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,t)$ について以下の問いに答えよ．但し，v は定数である．

(1) 2 変数関数 $f(x,t)$ が $f(x,t) = g(X)$ と表わされるとする（但し，$g(X)$ は $X \equiv kx - \omega t$ で定義される変数 X についての 1 変数関数であり，k と ω はともに正の定数で，$v = \omega/k$ であるとする）．この時，合成関数の偏微分法を用いて，$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) = k^2 \dfrac{d^2 g(X)}{dX^2}$ となることを示せ．

(2) (1) と同様の手順で，$\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,t) = \omega^2 \dfrac{d^2 g(X)}{dX^2}$ となることを示せ．

(3) 関数 $g(kx - \omega t)$ を上の偏微分方程式に代入し，(1) と (2) の結果を用いて，関数 $g(kx - \omega t)$ が上の偏微分方程式の解であることを示せ．

(4) 同様の手順で，関数 $h(kx + \omega t)$ が上の偏微分方程式の解であることを示せ．

(5) $f(x,t) = g(kx - \omega t)$ を，時刻 t における位置 x での媒質の変位と考えよう．時刻 $t = 0$ での変位 $f(x,0) = g(kx)$ を，x のみの関数であることを強調して $\varphi(x)$ で表わす : $\varphi(x) = g(kx)$．この時，時刻 $t = \Delta t$ での変位 $f(x, \Delta t)$ について，$f(x,\Delta t) = \varphi(x - \dfrac{\omega}{k}\Delta t)$ と表わされることを示せ．

(6) $\omega/k > 0$ に注意して，$\varphi(x - \dfrac{\omega}{k}\Delta t)$ で表わされるグラフが，$\varphi(x)$ で表わされるグラフをどのように平行移動させて得られるかを説明せよ．

(7) $g(kx) = \varphi(x)$ と $g(kx - \omega\Delta t) = \varphi(x - \dfrac{\omega}{k}\Delta t)$ のグラフが，各々時刻 $t = 0$ と $t = \Delta t$ における媒質の波形を表わすとする．つまり，$g(kx)$ で表わされる波が，時間 Δt の間に移動した時の波形が $g(kx - \omega\Delta t)$ で表わされると考える．この時，波の移動の向きとその速さを求めよ．

(8) $f(x,t) = h(kx + \omega t)$ の場合はどうか．(5)〜(7) と同様の手順で考えよ．

(解答) (1)〜(4) 省略，(5) $f(x,\Delta t) = g(kx - \omega\Delta t) = g(k(x - \dfrac{\omega}{k}\Delta t)) = \varphi(x - \dfrac{\omega}{k}\Delta t)$，(6) $\varphi(x - \dfrac{\omega}{k}\Delta t)$ のグラフは，$\varphi(x)$ のグラフを x 軸の正方向に $\dfrac{\omega}{k}\Delta t$ だけ平行移動させて得られる，(7) x 軸の正方向，速さ $\omega/k = v$，(8) 省略
(参考) 上の偏微分方程式は，速さ v の 1 次元波動の方程式である．$g(kx - \omega t)$ と $h(kx + \omega t)$ で表わされる波は，各々x 軸正方向と負方向に，速さ $v = \omega/k$ で進む波であり，一般の波動はこれらの線形結合 : $g(kx - \omega t) + h(kx + \omega t)$ で表わされる．

[問題 2.4] 偏微分方程式 $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f(x,y,z,t)=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,y,z,t)$ について以下の問いに答えよ．但し，v は定数である．

(1) 4 変数関数 $f(x,y,z,t)$ が $f(x,y,z,t)=g(X)$ と表わされるとする（但し，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$\boldsymbol{k}=(k_x,k_y,k_z)$ とした時，$g(X)$ は $X\equiv\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t$ で定義される変数 X についての 1 変数関数であり，k_x，k_y，k_z，ω（$\omega>0$）は定数で，$v=\omega/\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}$ であるとする）．この時，合成関数の偏微分法を用いて，$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y,z,t)=k_x^2\frac{d^2g(X)}{dX^2}$ となることを示せ（y または z についての二階の偏導関数についても同様の関係が成り立つことを確かめよ）．

(2) (1) と同様の手順で，$\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,y,z,t)=\omega^2\frac{d^2g(X)}{dX^2}$ となることを示せ．

(3) 関数 $g(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$ を上の偏微分方程式に代入し，(1) と (2) の結果を用いて，関数 $g(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$ が上の偏微分方程式の解であることを示せ．

(4) 同様の手順で，関数 $h(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\omega t)$ が上の偏微分方程式の解であることを示せ．

(解答) 省略
(参考) 上の偏微分方程式は，速さ v の 3 次元波動の方程式である．特に $f(x,y,z,t)\propto e^{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t}$ の形で表わされる解を平面波と呼ぶ．位相のそろった面が平面状になるからである．

[問題 2.5] 問題 2.4 と同じ偏微分方程式 $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f(x,y,z,t)=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,y,z,t)$ について以下の問いに答えよ．

(1) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とすると，関数 $\frac{\sin(kr-\omega t)}{r}$ が上の偏微分方程式の解であることを，問題 [1.**19**](4) の結果を用いて示せ（偏微分方程式に直接代入して確かめよ）．但し，k と ω は定数で，$v=\omega/k$ であるとする．

(2) 時刻 $t=0$ で (1) の関数で与えられる変位がゼロとなる時，r が満たす条件を求めよ．

(3) r が (2) で求めた条件を満たすような点の集まりは無数の曲面になる（曲面群）．どのような曲面群か．

(参考) (1) の解を球面波と呼ぶ．位相のそろった面が球面状になるからである．
(解答) 省略

2.2 積分型

[問題 2.6] 微分方程式 $y''=\frac{1}{1+x^2}$ について以下の問いに答えよ．

(1) この微分方程式の一般解を求めよ．

(2) 初期条件 $y(0)=0,\ y'(0)=0$ のときの特殊解を求めよ．

(解答) (1) $y=x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)+C_1x+C_2$，(2) $y=x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)$

[問題 2.7] **運動量と力積の関係**
質量 m の質点の速度を $\boldsymbol{v}(t)$ とし，これに働く力を $\boldsymbol{f}(t)$ とするとき以下の問いに答えよ．

(1) この質点の運動方程式を示せ．

(2) 時刻 t_1 および t_2 での質点の速度をそれぞれ，$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ とするとき，(1) の両辺を時間について t_1 から t_2 まで積分することで，運動量と力積の関係，$m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{f}(t)dt$ を示せ．

(3) 特に $\boldsymbol{f}(t)$ が時間によらず一定のとき（$\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{f}$），$\Delta t = t_2 - t_1$ とすると，$m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{f}\Delta t$ となることを示せ．

(注意) ベクトル $\boldsymbol{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t))$ の積分 $\int \boldsymbol{a}(t)dt$ は $(\int a_x(t)dt, \int a_y(t)dt, \int a_z(t)dt)$ という意味である．

(解答) 省略

[問題 2.8] **運動量保存則**

時刻 t での速度が $\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}(t)$ の質点（質量 m_{A}）と，時刻 t での速度が $\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}(t)$ の質点（質量 m_{B}）が互いの相互作用 (内力) のみを受けて運動する場合を考える．

(1) 質量 m_{A} の質点が質量 m_{B} の質点から受ける力を $\boldsymbol{f}$ とするとき，質量 m_{A} の質点の運動方程式を示せ．同様に，質量 m_{B} の質点の運動方程式を示せ．

(2) 質量 m_{A} の質点の時刻 t_1 および t_2 での速度を，それぞれ $\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}1}(= \boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}(t_1))$ および $\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}2}(= \boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}(t_2))$ とし，質量 m_{B} の質点の時刻 t_1 および t_2 での速度を，それぞれ $\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}1}(= \boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}(t_1))$ および $\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}2}(= \boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}(t_2))$ とするとき，(1) の結果を t_1 から t_2 まで t について積分することで，運動量保存則 $m_{\mathrm{A}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}1} + m_{\mathrm{B}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}1} = m_{\mathrm{A}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}2} + m_{\mathrm{B}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}2}$ が成り立つことを示せ．

(解答) 省略

[問題 2.9] **力学的エネルギー保存則**

位置エネルギーが $U(x(t), y(t), z(t))$ で与えられる場の中を，質量 m の質点が運動する場合を考える．この質点の速度を $\boldsymbol{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$ として以下の問いに答えよ．

(1) この質点の運動方程式を示せ．

(2) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right) = m\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}$ となることを示せ．ただし，$\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}$ は，ベクトル $\boldsymbol{v}$ と $\dot{\boldsymbol{v}}$ の内積を示す．また，$v^2 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ である．

(3) $\dfrac{dU}{dt} = \boldsymbol{v}\cdot\nabla U$ となることを示せ．

(4) (1) の運動方程式の両辺と速度 $\boldsymbol{v}$ の内積をとって，時間について積分することで，力学的エネルギー保存則 $\dfrac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) = C$（$C$ は定数）を示せ．

(解答) (1) $m\dot{\boldsymbol{v}} = -\nabla U$, (2)〜(4) 省略

2.3 変数分離型

[問題 2.10] 次の微分方程式の一般解を求めよ（可能であれば「$y = \cdots$」の形にして解答すること）．

(1) $y' = xy$	(2) $(1+x^2)y' = \dfrac{x}{y}$	(3) $xy' = y - 1$
(4) $x(y-1)y' = y$	(5) $y'\cos^3 x + 2\sin x\cos^2 y = 0$	(6) $y'\sqrt{1+x} = \sqrt{1+y}$

(解答) (1) $y = Ce^{x^2/2}$，(2) $y^2 = \log(1+x^2) + C$，(3) $y = Cx + 1$，(4) $xy = Ce^y$，(5) $\tan y + \sec^2 x = C$，(6) $\sqrt{1+y} = \sqrt{1+x} + C$

[問題 2.11] **原子核崩壊**

放射性原子はその時刻の原子数 $N(t)$ に比例した速さで原子核崩壊を起こして減少していく．比例係数を α として以下の問いに答えよ．

(1) 原子数 $N(t)$ の満たす微分方程式を求めよ．

(2) (1) の微分方程式の一般解を求めよ．

(3) 時刻 $t=0$ で原子数が N_0 であったとして，時刻 t での原子数を求めよ．

(4) 原子数が半分になる時間を特に半減期とよぶ．半減期が T であるとき，(3) を N_0，T および t のみを用いて表せ．

(解答) (1) $\frac{dN}{dt}=-\alpha N$，(2) $N=Ce^{-\alpha t}$，(3) $N=N_0 e^{-\alpha t}$，(4) $N=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}$

2.4 線型 1 階常微分方程式

[問題 2.12] 次の微分方程式の一般解を求めよ（変数分離の方法は用いないこと）．

(1) $xy'+y=x\log x$ (2) $y'-xy=2x$ (3) $y'-\dfrac{y}{x}=x^3$

(4) $y'-3y=e^{-x}$ (5) $xy'+2y=\sin x$ (6) $y'\sin x-y\cos x=\tan^2 x$

(解答) (1) $y=\frac{x}{2}\log x-\frac{x}{4}+\frac{C}{x}$，(2) $y=-2+Ce^{x^2/2}$，(3) $y=\frac{x^4}{3}+Cx$，(4) $y=-e^{-x}/4+Ce^{3x}$，(5) $y=(-x\cos x+\sin x+C)/x^2$，(6) $y=\sin x(\tan x+C)$

2.5 電気回路への応用 (キルヒホッフの法則)

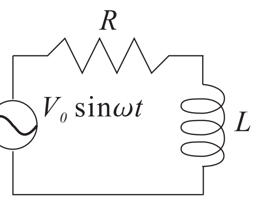
[問題 2.13] 右図の交流回路で時刻 $t=0$ に交流電圧 $V_0\sin\omega t$ をかけた．時刻 t に回路に流れる電流を $I(t)$ として以下の問いに答えよ．

(1) 交流電圧をかけた直後（$t=0$）に回路に流れる電流 $I(0)$ を求めよ．

(2) キルヒホッフの法則を適用して，$I(t)$ についての微分方程式を導け．

(3) (1) を初期条件として (2) の微分方程式を解き，$I(t)$ を求めよ．

(4) (3) の解について，十分時間が経ったとき，減衰して無視できる項とそれ以外の項を区別して示せ．減衰する項については，減衰の目安となる時間（時定数）を示し，それ以外の項については，時間の変化に伴ってどのように変化するかを調べよ．



(解答) (1) $I(0)=0$，(2) $V_0\sin\omega t-RI(t)-L\dot{I}(t)=0$，

(3) $I(t)=\dfrac{V_0}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)+\dfrac{\omega LV_0}{R^2+\omega^2L^2}e^{-\frac{R}{L}t}$，(4) 省略

2.6 線型 2 階定係数斉次常微分方程式

[問題 2.14] 次の微分方程式の一般解を求めよ（a は実数で $a\neq 0$ とする）．

(1) $y''+3y'-4y=0$ (2) $y''-2y'+2y=0$ (3) $y''-10y'+25y=0$

(4) $y''+a^2y=0$ (5) $y''-a^2y=0$ (6) $y''-ay'=0$

(解答) (1) $y=C_1e^{-4x}+C_2e^x$，(2) $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$，(3) $y=(C_1x+C_2)e^{5x}$，(4) $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax$，(5) $y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}$，(6) $y=C_1+C_2e^{ax}$

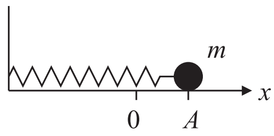
[問題 2.15] **単振動**

右図のように，質量 m の質点にバネ定数 k のバネをつけ，x 軸方向に A だけ伸ばして，時刻 $t=0$ に手を離した．質点と床の間に摩擦は無いものとし，バネの自然長での質点の x 座標を 0 として以下の問いに答えよ．

(1) 運動方程式から，質点の座標 $x(t)$ の満たす微分方程式を求めよ．

(2) $t=0$ での初期条件を示せ．

(3) (1) の微分方程式について，初期条件を満たす特殊解を求めよ．



(解答) (1) $m\ddot{x}(t) = -kx(t)$，(2) $x(0) = A$，$\dot{x}(0) = 0$，(3) $x(t) = A\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$

[問題 2.16] **減衰振動**

問題 2.15 と同じ状況で，速度に比例した空気抵抗力 $a\dot{x}(t)$ が質点に働くとき，以下の問いに答えよ．

(1) 運動方程式から，質点の座標 $x(t)$ の満たす微分方程式を求めよ．

(2) $t=0$ での初期条件を示せ．

(3) (1) の微分方程式について，a と $2\sqrt{mk}$ の大小に注意して，初期条件を満たす特殊解を求めよ．

(4) (3) の各々の特殊解に対応する質点の運動の特徴を調べよ．特に，$a=2\sqrt{mk}$ の時，運動の減衰の目安となる時定数 τ を示せ．

(5) (3) の各々の特殊解のグラフの概形を描け．

(解答) (1) $m\ddot{x}(t) = -a\dot{x}(t) - kx(t)$，(2) $x(0) = A$，$\dot{x}(0) = 0$，

(3) (a) $a > 2\sqrt{mk}$ のとき，$x(t) = A\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{a}{2\sqrt{a^2-4mk}}\right)e^{-\frac{a+\sqrt{a^2-4mk}}{2m}t} + A\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{a}{2\sqrt{a^2-4mk}}\right)e^{-\frac{a-\sqrt{a^2-4mk}}{2m}t}$

(b) $a = 2\sqrt{mk}$ のとき，$\dfrac{a}{2m} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ なので，$x(t) = A\left(1 + \sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}$

(c) $0 < a < 2\sqrt{mk}$ のとき，$x(t) = Ae^{-\frac{a}{2m}t}\left\{\cos\dfrac{\sqrt{4mk-a^2}}{2m}t + \dfrac{a}{\sqrt{4mk-a^2}}\sin\dfrac{\sqrt{4mk-a^2}}{2m}t\right\}$，

(4) (a) は過減衰, (b) は臨界減衰, (c) は減衰振動に各々対応する．(b) における時定数 τ は $\tau = \sqrt{m/k}$.

(5) 省略

2.7 線型 2 階定係数非斉次常微分方程式

[問題 2.17] 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $y'' + y' - 2y = 10\cos x$　(2) $2y'' - 6y' + 5y = x - 2$　(3) $y'' + 2y' + y = e^{2x}$

(4) $y'' + y = \sin x$　(5) $y'' + y' = e^{2x}(\cos x - 2\sin x)$

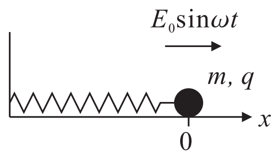
(解答) (1) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{x} - 3\cos x + \sin x$，(2) $y = e^{3x/2}\left(C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{25}(5x-4)$，
(3) $y = (C_1x + C_2)e^{-x} + e^{2x}/9$，(4) $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{x}{2}\cos x$，
(5) $y = C_1 + C_2e^{-x} + \frac{1}{10}e^{2x}(3\cos x - \sin x)$，

[問題 2.18] **減衰の無い強制振動**

右図のように，質量 m で電荷 q を持つ質点にバネ定数 k のバネをつけ，自然長で床に置き，時刻 $t=0$ から x 軸方向に $E_0\sin\omega t$ の一様な電場をかけた．質点と床の間に摩擦は無いものとし，バネの自然長での質点の x 座標を 0 として以下の問いに答えよ．

(1) 運動方程式から，質点の座標 $x(t)$ の満たす微分方程式を求めて，$t=0$ での初期条件を示せ．

(2) $\omega \neq \sqrt{k/m}$ のとき，(1) の微分方程式について，初期条件を満たす特殊解を求めよ．



(3) $\omega = \sqrt{k/m}$ のとき，(1) の微分方程式について，初期条件を満たす特殊解を求めよ．

(4) (3) の解は (2) の解と比較してどのような特徴があるかを，振幅に注意して述べよ．

(解答) (1) $m\ddot{x}(t) = -kx(t) + qE_0 \sin\omega t$，初期条件： $x(0)=0,\ \dot{x}(0)=0$，

(2) $x(t) = \dfrac{qE_0}{k-m\omega^2}\left(-\omega\sqrt{\dfrac{m}{k}}\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t + \sin\omega t\right)$，(3) $x(t) = \dfrac{qE_0}{2\omega^2 m}\sin\omega t - \dfrac{qE_0}{2\omega m}t\cos\omega t$，

(4) 省略

[問題 2.19] **減衰のある強制振動**

問題 2.18 と同じ状況で，速度に比例した空気抵抗力 $a\dot{x}(t)$ が質点に働くとき，以下の問いに答えよ．

(1) 運動方程式から，質点の座標 $x(t)$ の満たす微分方程式を求めて，その初期条件を示せ．

(2) (1) で求めた微分方程式に対応する斉次方程式の一般解は，十分時間が経つと無視できる．$0 < a < 2\sqrt{mk}$ の時（減衰振動），斉次方程式の一般解が無視できるようになる時間の目安（時定数）を示せ．

(3) (1) の微分方程式の特殊解を $x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ と仮定して求めよ（定数 A と B を決定せよ）．

(4) $\omega\,(>0)$ を変化させた時，(3) の解の振幅が極大となる ω を求めよ（共鳴周波数）．また，$\omega > 0$ の範囲で極大を持つための条件を示せ．

(解答) (1) $m\ddot{x}(t) = -a\dot{x}(t) - kx(t) + qE_0\sin\omega t$，(2) 省略，

(3) $x(t) = \dfrac{qE_0}{(k-m\omega^2)^2 + a^2\omega^2}\left\{(k-m\omega^2)\sin\omega t - a\omega\cos\omega t\right\}$

$= \dfrac{qE_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+a^2\omega^2}}\sin(\omega t-\phi) \quad (\phi = \tan^{-1}\dfrac{a\omega}{k-m\omega^2})$，

(4) $\omega = \sqrt{\dfrac{2mk-a^2}{2m^2}}$，$\sqrt{2mk} > a$

3　重積分

3.1　累次積分と積分順序の交換

[問題 3.1]　以下の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D xydxdy$，$D:0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$

(2) $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)dxdy$，$D:0\le x\le \pi/2,\ 0\le y\le \pi/2$

(3) $\displaystyle\iint_D xye^{-(x^2+y^2)}dxdy$，$D:0\le x\le \infty,\ 0\le y\le \infty$

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+x+y+xy}dxdy$，$D:0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$

(解答) (1) $1/4$，(2) 2，(3) $1/4$，(4) $(\log 2)^2$

[問題 3.2]　$\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ の積分領域 D が以下で与えられるとき，積分領域を図示し，y について積分してから x について積分する累次積分と，x について積分してから y について積分する累次積分の両方を示せ．

(1)　$D:0\le x,\ 0\le y,\ \dfrac{x}{2}+y\le 1$　　(2)　$D:x\le 1,\ 0\le y,\ y^2\le x$

(3)　$D:0\le x\le 1,\ 0\le y,\ y\le x^2$　　(4)　$D:0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ (x-1)^2+(y-1)^2\ge 1$

(5)　$D:y\ge x^2,\ y\le x$

(解答) (1) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{1-x/2} f(x,y)dydx=\int_0^1\int_0^{2-2y} f(x,y)dxdy$,

(2) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx=\int_0^1\int_{y^2}^1 f(x,y)dxdy$，(3) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x^2} f(x,y)dydx=\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dxdy$,

(4) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dydx=\int_0^1\int_0^{1-\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dxdy$,

(5) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{x} f(x,y)dydx=\int_0^1\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy$

[問題 3.3]　以下の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D xydxdy$，$D:0\le x\le 1,\ x\le y\le 2-x$

(2) $\displaystyle\iint_D xdxdy$，$D:0\le x\le \pi,\ 0\le y\le \sin x$

(3) $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2}dxdy$，$D:0\le x,\ 0\le y,\ x^2+y^2\le 1$

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x+y}}dxdy$，$D:0\le y\le x\le 1$

(5) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{1+xy}dxdy$，$D:0\le y\le x\le 1$

(解答) (1) $1/3$，(2) π，(3) $2/3$，(4) $4(\sqrt{2}-1)/3$，(5) $\log 2-2+\pi/2$

3.2 重積分の座標変換

[問題 3.4] 以下の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy$，$D\,:\,a^2 \le x^2+y^2 \le b^2,\ a>0,\ b>0$

(2) $\displaystyle\iint_D \log(1+x^2+y^2)dxdy$，$D\,:\,x^2+y^2 \le 1$

(3) $\displaystyle\iiint_D dxdydz$，$D\,:\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1,\ a>0,\ b>0,\ c>0$
（ヒント：$X=\frac{x}{a}, Y=\frac{y}{b}, Z=\frac{z}{c}$ と変数変換した後で，(X,Y,Z) に対して球座標変換せよ.）

(4) $\displaystyle\iiint_D zdxdydz$，$D\,:\,x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \ge 0$

(5) $\displaystyle\iiint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2+z^2}dxdydz$，$D\,:\,x^2+y^2+z^2 \le 1, 0 \le x, 0 \le y, 0 \le z$

(解答) (1) $2\pi\log\frac{b}{a}$，(2) $\pi(2\log 2-1)$，(3) $\frac{4\pi abc}{3}$，(4) $\pi/4$，(5) $\frac{1}{9}(3\pi/4-2)$

[問題 3.5] 積分領域 $D\,:\,x^2+y^2 \le R^2$ で以下の重積分を求め，さらに $R\to\infty$ での極限値を求めよ．但し，σ，z_0 は定数である．

(1) $\displaystyle\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\iint_D \frac{x}{(x^2+y^2+z_0^2)^{3/2}}dxdy$

(2) $\displaystyle\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\iint_D \frac{y}{(x^2+y^2+z_0^2)^{3/2}}dxdy$

(3) $\displaystyle\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\iint_D \frac{z_0}{(x^2+y^2+z_0^2)^{3/2}}dxdy$

(解答) (1) 0，(2) 0，(3) $\frac{\sigma z_0}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{z_0}-\frac{1}{\sqrt{R^2+z_0^2}}\right)$，$\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

[問題 3.6] 積分領域 D が $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ で与えられるとき，以下の重積分を求めよ．但し，z_0 は定数で $z_0>R$ を満たす.

(1) $\displaystyle\frac{\rho}{4\pi\epsilon_0}\iiint_D \frac{x}{(x^2+y^2+(z-z_0)^2)^{3/2}}dxdydz$

(2) $\displaystyle\frac{\rho}{4\pi\epsilon_0}\iiint_D \frac{y}{(x^2+y^2+(z-z_0)^2)^{3/2}}dxdydz$

(3) $\displaystyle\frac{\rho}{4\pi\epsilon_0}\iiint_D \frac{z_0-z}{(x^2+y^2+(z-z_0)^2)^{3/2}}dxdydz$
(3) については，(i) 球座標に変換後，$\cos\theta=t$ と変換して θ についての積分を実施する方法と，
(ii) $\displaystyle\frac{z_0-z}{(x^2+y^2+(z-z_0)^2)^{3/2}} = -\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{(x^2+y^2+(z-u)^2)^{1/2}}\Bigg|_{u=z_0}$ の関係を利用する方法の
２つの方法で計算せよ．

(解答) (1) 0，(2) 0，(3) $\frac{\rho}{4\pi\epsilon_0}\frac{4\pi R^3}{3}\frac{1}{z_0^2}$